4

Estimations d'intégrales

I $\int_{x_0}^{x}$ en cas de divergence:

Th: Soit f, g $[a,+\infty[\xrightarrow{CPM} \mathbb{R}$ avec g positive
On suppose $\int_a^{+\infty} g$ diverge

i) si $f \underset{+\infty}{=} o(g)$ alors $\int_a^x f \underset{+\infty}{=} o\left(\int_a^x g\right)$

ii) Si $f \sim g$, alors $\int_a^x f \sim \int_a^x g$

D/ i) Soit $\varepsilon > 0$

Il existe $a_\varepsilon \geq a$ tq $\forall x \geq a_\varepsilon$, $|f(x)| \leq \varepsilon g(x)$

$$\left|\int_a^x f\right| \leq \left|\int_a^{a_\varepsilon} f\right| + \left|\int_{a_\varepsilon}^{x} f\right| \leq \underbrace{\left|\int_a^{a_\varepsilon} f\right|}_{A_\varepsilon} + \int_{a_\varepsilon}^{x} \varepsilon g$$

alors $\forall x \geq a_\varepsilon$ $\left|\int_a^x f\right| \leq A_\varepsilon + \varepsilon\int_a^x g$ or par hyp

$\int^{+\infty} g$ diverge et comme $g \geq 0$ $\int_a^x g \to +\infty$

donc $\exists b_\varepsilon \geq a_\varepsilon$ tq, $\forall x \geq b_\varepsilon$, $A_\varepsilon \leq \varepsilon \int_a^x g$; d'où

$\forall x \geq b_\varepsilon$ $\left|\int_a^x f\right| \leq 2\varepsilon \left|\int_a^x g\right|$

ii) On écrit $f = g + o(g)$, d'où $\int_a^x f = \int_a^x g + \underbrace{\int_a^x o(g)}_{= o\left(\int_a^x g\right)}$

Ex: 1) $f(x) = li(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t}$ On cherche un DA de f en $+\infty$

idée = IPP + renforcement de la CV

$$\int_2^x \frac{dt}{\ln t} = \left[\frac{t}{\ln t}\right]_2^x - \underbrace{\int_2^x \frac{dt}{\ln^2(t)}}_{o\,?}$$

$$f(x) = \frac{x}{\log x} + o(f(x)) \quad \Big| \quad f(x) \sim \frac{x}{\log x} \text{ donc } o(f) = o(g)$$

donc $f(x) = \frac{x}{\log x} + o\left(\frac{x}{\log x}\right)$

On généralise

$$\int_2^x \frac{dt}{\ln^2 t} = \left[\frac{x}{\ln^2 x}\right]_2^x + 2\underbrace{\int_2^x \frac{dt}{\ln^3 t}}_{o} \text{ etc...}$$

si $p \geq 3$ on a $f(x) = \underbrace{\sum_{k=1}^{p} \frac{(k-1)!\,x}{\log^k x}}_{\text{diverge } p\to+\infty} - \sum_{k=1}^{p} \frac{(k-1)!\,2}{\log^k 2} + (p-1)! \int_2^x \frac{dt}{\ln^{p+1} t}$

car à x fixé $\frac{(k-1)!\,x}{\log^k(x)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{p} \frac{(k-1)!\,x}{\log^k x} + o\left(\frac{x}{\log^p x}\right)$$

Ex: Equivalent de $\sum_{k=1}^{n} e^{\sqrt{k}}$ $\quad e^{\sqrt{t+1}} \sim e^{\sqrt{t}}$, $e^{\sqrt{t+1}-\sqrt{t}} \sim 1$

a)

$$\int_1^{n-1} e^{\sqrt{t}}\,dt \leq \sum_{k=2}^{n} e^{\sqrt{k}} \leq \int_2^{n+1} e^{\sqrt{t}}\,dt$$

Equivalent de $\int_2^x e^{\sqrt{t}}\,dt = \int_2^x \sqrt{t}\,\frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,dt$

$$= \left[2\sqrt{t}\,e^{\sqrt{t}}\right]_2^x - \int_2^x \frac{1}{\sqrt{t}}\,e^{\sqrt{t}}\,dt$$

or (Th-i) $\int_2^x \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,dt = o\left(\int_2^x e^{\sqrt{t}}\,dt\right)$

donc $\int_2^x e^{\sqrt{t}} \underset{+\infty}{\sim} 2\sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}}$

$\left(\text{et } \int_2^x \frac{e^{\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\,dt = o(\sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}})\right)$ Ainsi

$$\int_1^n e^{\sqrt{t}}\,dt \underset{+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}\,e^{\sqrt{n}} \left(\sim \int_2^{n+1} e^{\sqrt{t}}\,dt \sim \int_2^{n+1} e^{\sqrt{t}}\,dt\right)$$

RM: Pour mq $S_n \sim \underbrace{2\sqrt{n}\,e^{\sqrt{n}}}_{V_n}$

Si on devine l'equivalent:

$V_{n+1} - V_n = \dots\dots = e^{\sqrt{n}} + o(\sqrt{n})$ et on somme

II Cas des intégrales convergentes:

$f, g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ avec $g \geq 0$.

On suppose que $\int_a^{+\infty} g$ converge

i) Si $f = O(g)$, f est intégrable sur $[a, +\infty[$

Alors $\int_x^{+\infty} f = O\left(\int_x^{+\infty} g\right)$

ii) $f \underset{+\infty}{=} o(g)$ — — — — $\int_x^{+\infty} f = o\left(\int_x^{+\infty} g\right)$

iii) $f \underset{+\infty}{\sim} g$ — — — — $\int_x^{+\infty} f \sim \int_x^{+\infty} g$

D/ iii) Soit $\varepsilon > 0$, il existe $a_\varepsilon > a$ tq $\forall t \geq a_\varepsilon$ $|f(t)| \leq \varepsilon g(t)$

$$\left|\int_x^{+\infty} f\right| \leq \int_x^{+\infty} |f(t)|\,dt \leq \varepsilon \int_x^{+\infty} g(t)\,dt$$

Ex: DA de $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt \; (= f(x))$

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt = \left[-\frac{e^{-t}}{t}\right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt$$

$$= \frac{e^{-x}}{x} - \underbrace{\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt}_{R(x)}$$

$$R(x) = o(f(x))$$

donc $f(x) \sim \frac{e^{-x}}{x}$ et à postériori $R(x) = o\left(\frac{e^{-x}}{x}\right)$

Ex: $\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \int_x^{+\infty} \frac{1}{2t}\left(e^{-t^2} 2t\right)dt$

$$= \underbrace{\left[-\frac{e^{-t^2}}{2t}\right]_x^{+\infty}} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2t^2}\,dt$$

$$= \frac{e^{-x^2}}{2x} + o\left(\frac{e^{-x^2}}{2x}\right)$$